NOM PRÉNOM : ______________________________

MAT 108 - Statistiques & Probabilités élémentaires

5 décembre 2025

Durée : 30 minutes

- Tous les documents, téléphones portables et autres objets connectés sont interdits.
- La qualité des explications et de la rédaction sera vivement prise en compte dans la notation.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Le sujet est à rendre avec votre copie !

Exercice 1 (*Question de cours*)**.** Soient A et B deux évènements d'un univers Ω, avec $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$.

1. Rappeler la formule de Bayes qui exprime $\mathbb{P}(A \mid B)$ en fonction de $\mathbb{P}(B \mid A)$, $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$. (2)

Solution :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

2. (*Bonus*) Démontrer cette formule. (1)

Solution : Par définition des probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}(A \mid B) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(B \mid A) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)},$$

nous avons $\mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(A)$. En divisant cette égalité par $\mathbb{P}(B) \neq 0$ nous obtenons le résultat voulu.

Exercice 2 (*Lancer de dés truqués*)**.** On dispose de quatre dés à six faces : trois d'entre eux sont équilibrés et le quatrième est truqué. Le dé truqué est tel que la probabilité d'obtenir un 6 lors d'un lancer vaut $1/2$.

1. On tire un dé au hasard parmi les quatre. On lance ce dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité pour que ce dé soit truqué ? (3)

   Indication : proposer des évènements pour modéliser le problème et estimer leurs probabilités.

Solution : Posons A : « le dé sélectionné est truqué » et B : « le résultat du lancer est un 6 ». Les données de l'énoncé donnent $\mathbb{P}(A)=1/4$, $\mathbb{P}(B\,|\,A)=1/2$ et $\mathbb{P}(B\,|\,\overline{A})=1/6$. Au passage, nous avons $\mathbb{P}(\overline{A})=1-\mathbb{P}(A)=3/4$. La formule des probabilités totales permet de déterminer $\mathbb{P}(B)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B\,|\,A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B\,|\,\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

La probabilité recherchée est celle de l'évènement « le dé est truqué sachant que le résultat du lancer est un 6 », *i.e.* on veut calculer $\mathbb{P}(A\,|\,B)$. La formule de Bayes nous donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\,|\,B) &= \frac{\mathbb{P}(B\,|\,A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}\\ &= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les quatre. On lance ce même dé n fois, et on obtient n fois le chiffre 6. Déterminer la probabilité p_n pour que ce dé soit truqué. (3)

Solution : Le raisonnement est similaire : on pose C l'évènement « on obtient n fois le chiffre 6 ». Les différents lancers de dés étant indépendants les uns des autres, nous avons

$$\mathbb{P}(C\,|\,A)=\frac{1}{2}\times\cdots\times\underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{\text{obtenir 6}\\ \text{au } k^{\text{ème}} \text{ lancer}}}\times\cdots\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^n}.$$

De même, nous avons $\mathbb{P}(C\,|\,\overline{A})=1/6^n$. Nous voulons déterminer $p_n\overset{\text{def}}{=}\mathbb{P}(A\,|\,C)$, nous appliquons donc la formule de Bayes (dans sa version un peu plus générale) :

$$\begin{aligned}p_n &= \frac{\mathbb{P}(C\,|\,A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(C\,|\,A)\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(C\,|\,\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})}\\ &= \frac{\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{4}}{\frac{1}{2^n}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6^n}\times\frac{3}{4}}\\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{3^{n-1}}}.\end{aligned}$$

3. Donner une interprétation de ce résultat. À partir de quelle valeur de n la probabilité p_n dépasse-t-elle 99% ?* (2)

* Il n'est pas nécessaire de donner une valeur numérique exacte, mais si vous voulez la calculer, voilà une *indication* : $\log_3(99)\approx 4,18$.

Solution : Intuitivement, si on obtient n fois le chiffre 6 lors des n lancers pour un nombre de lancers de plus en plus important, c'est sans doute que le dé choisi est truqué. Indépendamment de la probabilité de réaliser l'évènement C, nous nous attendons donc à ce que la probabilité que le dé soit truqué sachant C s'approche de 1 lorsque n est grand. Cette intuition est confirmée par le calcul, puisque

$$p_n = \frac{1}{1+3^{1-n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+0} = 1.$$

On remarque également que pour $n = 1$, nous trouvons $p_1 = 1/(1+3^0) = 1/2 = \mathbb{P}(A\,|\,B)$: on retrouve le résultat de la question 1.

Maintenant, si $n \in \mathbb{N}^*$ est tel que $p_n \geq 99\%$, alors

$$\begin{aligned} p_n = \frac{1}{1+3^{1-n}} &\geq \frac{99}{100} \\ 1+3^{1-n} &\leq \frac{100}{99} \\ 1-n &\leq \log_3\left(\frac{1}{99}\right) = -\log_3(99) \\ n &\geq 1+\log_3(99). \end{aligned}$$

Puisque l'on nous demande de déterminer à partir de quelle valeur de $n \in \mathbb{N}^*$ cette condition est réalisée, on prend n l'entier le plus petit vérifiant $n \geq 1+\log_3(99)$. L'entier recherché est donc $n \overset{\text{def}}{=} \lceil 1+\log_3(99)\rceil$. En utilisant l'indication, on a $4 < \log_3(99) < 5$, *i.e* $5 < 1+\log_3(99) < 6$, il faudra donc un total de $n = 6$ lancers tombant sur la valeur 6 pour assurer que nous avons 99% de chances que le dé sélectionné soit truqué.